Quelle est la base d'un produit d'idéaux ?

Colas Bardavid

mardi 14 juin 2005

Table des matières

1 Quelques rappels **1**
1.1 Base d'un idéal 1
1.2 Produit d'idéaux 1

2 La réponse **1**

3 Un exemple **2**

1 Quelques rappels

Soit A un anneau (commutatif ?).

1.1 Base d'un idéal

Rappelons que $(f_i)_{i\in I}$, où $f_i \in A$, pour tout $i \in I$, est une base d'un idéal I si l'idéal engendré par les f_i, $i \in I$, $(f_i)_{i\in I}$ est égal à I.

1.2 Produit d'idéaux

Soit $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'idéaux de A. On définit $\prod_{j\in J} I_j$ comme l'idéal engendré par les $f_i f_j$, avec $i, j \in J$ et $f_i \in I_i$ et $f_j \in I_j$.

2 La réponse

Proposition 1 *Soient $(I_j)_{j\in J}$ une famille d'idéaux de A. Soit $(f_i(j))_{i\in E_j} \in I_j$ une base de I_j pour tout $j \in J$. Alors, une base de $\prod_{j\in J} I_j$ est*

$$(f_i(j)f_{i'}(j'))_{j,j'\in J \text{ et } i^{(\prime)}\in E_{j^{(\prime)}}}.$$

Démonstration : Soit $x \in \prod_{j\in J} I_j$; on peut écrire $x = \sum_{l=1}^{N} h_{i_l} h_{k_l}$, où les i_l, k_l sont des indices dans J et où $h_{i_l} \in I_{i_l}$ et $h_{k_l} \in I_{k_l}$. Puis, on écrit $h_{i_l} = \sum_{n=1}^{N_l} g_n(l) f_{p_n(l)}(i_l)$ où $p_n(l) \in E_{i_l}$ pour chaque $n \leq N_l$ (c'est-à-dire, les $f_{p_n(l)}(i_l)$ sont des éléments de la base) et où les $g_n(l)$ sont des éléments de A.

Identiquement, on écrit : $h_{k_l} = \sum_{n=1}^{N'_l} g'_n(l) f_{p'_n(l)}(k_l)$.

On écrit alors juste le produit :

$$h_{i_l} h_{k_l} = \sum_{\substack{1 \leq n \leq N_l \\ 1 \leq m \leq N'_k}} g_n(l) g'_m(l) f_{p_n(l)}(i_l) f_{p'_m(l)}(k_l)$$

Ça permet de conclure. ■

3 Un exemple

On se place dans l'anneau $A = k[x, y, z]$. On considère les idéaux $I = (z, y)$ et $J_t = (z-t, x)$. Alors, le produit des deux idéaux, $IJ_t = (z(z-t), xz, y(z-t), yx)$.