Idéaux premiers des anneaux d'entiers

Colas Bardavid

dimanche 22 mai 2005

1 Rappels

Soit K un corps de caractéristique nulle (dans la pratique, K est un corps de nombres, c'est-à-dire une extension finie de $\mathbf{Q}$).

On note $\mathcal{O}_K$ l'ensemble des entiers de K c'est-à-dire les éléments de K qui satisfont une équation polynômiale à coefficients dans $\mathbf{Z}$ dont le coefficient principal est entier.

Autrement dit, c'est l'ensemble des éléments entiers de $\begin{array}{c} K \\ \uparrow \\ \mathbf{Z} \end{array}$.

$\mathcal{O}_K$ est un sous-anneau de K. On dispose donc naturellement d'une flèche (d'inclusion) $\begin{array}{c} \mathcal{O}_K \\ \uparrow \\ \mathbf{Z} \end{array}$. Par ailleurs, $\mathcal{O}_K$ est intègre.

2 Idéaux premiers d'anneaux d'entiers

Proposition 1 *Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier non-nul de $\mathcal{O}_K$. Alors, la trace de $\mathfrak{P}$ sur $\mathbf{Z}$ est un idéal premier non-nul de $\mathbf{Z}$, du type (p).*

Démonstration : La preuve n'est pas compliquée. Soit $\mathfrak{P}$ un idéal premier non-nul de $\mathcal{O}_K$. Soit $x \in \mathfrak{P} \setminus \{0\}$. Alors, en particulier, x est entier au-dessus de $\mathbf{Z}$. Soit P un polynôme unitaire à coefficients dans $\mathbf{Z}$ annulant x et de degré minimal. Comme x est non-nul, P n'est pas divisible par X. C'est-à-dire que son coefficient constant, à valeur dans $\mathbf{Z}$, est non-nul. Comme $x \in \mathfrak{P}$, pour tout polynôme $Q \in \mathbf{Z}[X]$, $Q(x) \in \mathfrak{P}$. Donc $P(0) \in \mathfrak{P}$. Donc $\mathbf{Z} \cap \mathfrak{P} \neq (0)$. On sait par ailleurs, en toute généralité, que $\mathbf{Z} \cap \mathfrak{P}$ est un idéal premier de $\mathbf{Z}$. $\blacksquare$